Gry Nieskończone

Krzysztof Płotka

Praca Magisterska

Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański

Gdańk 1997

Spis treści

Wstęp

Praca ta dotyczy gier nieskończonych z doskonałą informacją, tzn. gier, w których gracze wykonując ruch znają wszystkie wcześniejsze. W pierwszym paragrafie omawiamy grę Banacha-Mazura, podajemy definicję strategii, strategii wygrywającej oraz zbioru zdeterminowanego. Następnie podajemy charakteryzację zbiorów zdeterminowanych. W tym paragrafie zostaje podane i udowodnione twierdzenie Zindulki o rozbiciu dowolnej przestrzeni metrycznej bez punktów izolowanych na sumę dwóch zbiorów: miary zero i I-kategorii. W paragrafie drugim zajmujemy się innym przykładem gry nieskończonej. Gra ta została sformułowana przez autora pracy. Podane są pewne własności tej gry, między innymi jej związek ze zmodyfikowaną wersją gry Banacha-Mazura. Dalsza część pracy jest poświęcona aksjomatowi determinacji, do którego określenia wykorzystuje się teorię gier nieskończonych. Podajemy sformułowanie tego aksjomatu, pewne równoważne formy oraz konsekwencje. Krótko zostaje również zreferowany problem niesprzeczności oraz niezależności tego aksjomatu od pozostałych aksjomatów teoriomnogościowych. Praca kończy się dowodem jednej z bardzo interesujących konsekwencji aksjomatu determinacji, a mianowicie mierzalności wszystkich zbiorów na prostej względem miary Lebesgue'a.

Terminologia i oznaczenia.

Przez przedział na prostej rozumiemy przedział postaci $[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < +\infty$. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathbf{R}$.

Przestrzeń nieskończonych ciągów liczb naturalnych ω^ω z metryką

$$\rho(s,t) = (\min\{n : s_n \neq t_n\} + 1)^{-1}, \ \ (s \neq t)$$

nazywamy przestrzenią Baire'a. Przestrzeń Cantora 2^ω jest podprzestrzenią ω^ω. $\omega^{<\omega}$ oraz $2^{<\omega}$ oznaczają zbiór skończonych ciągów (w tym również ciąg pusty) elementów zbiorów odpowiednio ω i $\{0, 1\}$. Niech $s = \langle s_0, s_1, \ldots, s_n \rangle, p = \langle p_0, p_1, \ldots, p_m \rangle \in \omega^{<\omega}$. Przez $s * p$ oznaczamy ciąg $\langle s_0, \ldots, s_n, p_0, \ldots, p_m \rangle$.

Przez A^0, A', $\overline{\overline{A}}$ oznaczamy odpowiednio wnętrze, dopełnienie oraz moc zbioru A.

$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{2^\omega}}$.

$[X]^\omega = \{A \subseteq X : \overline{\overline{A}} = \aleph_0\}$.

Przez m oznaczamy jednowymiarową miarę Lebesgue'a.

WAC oznacza następującą słabszą wersję aksjomatu wyboru AC:

Dla każdej rodziny zbiorów niepustych $\mathcal{F}$ takiej, że $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \leq \aleph_0$ oraz $\overline{\overline{\bigcup \mathcal{F}}} \leq 2^{\aleph_0}$ istnieje funkcja wyboru.

§1. **Gra Banacha-Mazura.**

Gra Banacha-Mazura jest jednym z wielu przykładów matematycznych gier nieskończonych. Została wymyślona przez S.Mazura, ale podstawowe twierdzenie dotyczące tej gry udowodnił Banach (stąd nazwa). Zasady tej gry opisujemy poniżej.

Rozważmy przedział I_0 na prostej oraz pewien wyróżniony jego podzbiór A. W grze uczestniczy dwóch graczy: gracz (I) i gracz (II). Grę rozpoczyna gracz (I), który wybiera przedział I_1 zawarty w I_0. Ruch gracza (II) polega na wyborze przedziału $I_2 \subseteq I_1$. Następnie gracz (I) wybiera $I_3 \subseteq I_2$, itd. W ten sposób gracze określają nieskończony ciąg zstępujących przedziałów $\langle I_n \rangle_{n\in\omega}$ (ciąg ten nazywamy wynikiem gry), przy czym przedziały o indeksach nieparzystych zostały wybrane przez gracza (I), pozostałe zaś przez gracza (II). Gra jest wygrana przez gracza (I), jeśli

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \cap A \neq \emptyset.$$

W przeciwnym przypadku wygrywa gracz (II). Grę z tak określonymi regułami oraz wyróżnionymi przedziałem I_0 i zbiorem A oznaczymy przez $\langle I_0, A \rangle$.

Jak w przypadku np. gier karcianych, tak również w przypadku matematycznych gier nieskończonych powstaje pytanie, jak gracze "powinni grać", aby być pewni swojej wygranej, i czy w ogóle istnieje taka "zwycięska metoda gry" dla któregoś z nich. Metodę, na podstawie której dany gracz będzie dokonywał wyborów nazwiemy strategią danego gracza. Mówiąc ściśle: **strategią gracza (I)** nazywamy funkcję f określoną na zbiorze $\{(I_0, I_1, \ldots, I_{2n}) : I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq$

$I_{2n}, n \in \omega\}$ o wartościach w zbiorze $\{I : I \subseteq I_0\}$ spełniającą warunek:

$$(1) \qquad f(I_0, \ldots, I_{2n}) \subseteq I_{2n} \qquad (n \in \omega).$$

Podobnie określamy strategię dla gracza (II). Jest to funkcja

$$g : \{(I_0, I_1, \ldots, I_{2n+1}) : I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_{2n+1}, n \in \omega\} \longrightarrow \{I : I \subseteq I_0\}$$

o własności

$$(2) \qquad f(I_0, \ldots, I_{2n+1}) \subseteq I_{2n+1} \quad (n \in \omega).$$

Strategię f nazwiemy **zwycięską dla gracza (I)**, jeśli gracz ten grając zgodnie z tą strategią (tzn. wybierając w swoim n-tym ruchu przedział $f(I_0, I_1, \ldots, I_{(2n-1)})$, gdzie $I_1, \ldots, I_{(2n-1)}$ wcześniej wybrane przedziały) wygrywa bez względu na to jak grał (II). Podobnie określamy zwycięską strategię dla gracza (II). Teraz wcześniejsze pytanie możemy sformułować następująco: czy w grze $\langle I_0, A\rangle$ istnieje zwycięska strategia dla któregoś z graczy? Oczywiście odpowiedą na to pytanie będzie zależała od własności zbioru A.

Zbiór $A \subseteq I_0$ nazywamy **zdeterminowanym dla gracza (I)** w grze $\langle I_0, A\rangle$, jeśli istnieje zwycięska strategia dla (I). Mówimy wtedy również, że gra $\langle I_0, A\rangle$ jest zdeterminowana dla (I). Analogicznie określamy zbiór zdeterminowany dla gracza (II).

Poniżej podamy twierdzenie charakteryzujące zbiory zdeterminowane dla (II) w grze Banacha-Mazura (patrz [13], Tw 6.1).

Twierdzenie 1. *Gracz (II) posiada zwycięską strategię w grze $\langle I_0, A\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem I-kategorii.*

Dowód.

($\Leftarrow$)

Załóżmy, że A jest zbiorem I-kategorii. Czyli $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, gdzie A_n jest zbiorem nigdziegęstym dla $n = 0, 1, \ldots$. Zdefiniujemy teraz zwycięską strategię dla (II).

Niech $I_0, I_1, \ldots, I_{2n+1}$ będzie ciągiem przedziałów takim, że $I_{i+1} \subseteq I_i$. Ponieważ zbiór A_n jest nigdziegęsty, więc istnieje przedział $I_{2n+2} \subseteq I_{2n+1}$ rozłączny z A_n.

Kładziemy $g(I_0, I_1, \ldots, I_{2n+1}) := I_{2n+2}$. Określiliśmy więc strategię dla gracza (II). Uzasadnimy teraz, że jest to strategia zwycięska.

Niech $\langle I_n \rangle_{n \in \omega}$ będzie wynikiem gry $\langle I_0, A \rangle$. Jeśli (II) grał zgodnie z g, to

$$I_{2n+2} \cap A_n = \emptyset \quad (n \in \omega).$$

Stąd i z tego, że $\langle I_n \rangle_{n \in \omega}$ jest ciągiem zstępującym otrzymujemy

$$\bigcap_k I_k \cap A_n = \emptyset \quad (n \in \omega).$$

A ponieważ $A = \bigcup A_n$, więc

$$\bigcap I_n \cap A = \emptyset.$$

To znaczy, że g jest zwycięską strategią dla (II).

($\Rightarrow$)

Niech będzie dana zwycięska strategia g dla gracza (II). skonstrułujemy najpierw ciąg przedziałów $J_i \subseteq I_0^0 \quad (i \in \omega)$ o własnościach:

(i) $K_i \overset{\text{def}}{=} g(I_0, J_i)$ są wzajemnie rozłączne dla $i \in \omega$,

(ii) zbiór $\bigcup K_i^0$ jest gęsty w I_0.

Konstrukcja.

Niech $\mathcal{S} = \langle S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots \rangle$ będzie różnowartościowym ciągiem wszystkich przedziałów o końcach wymiernych zawartych w I_0^0.

$$J_0 \overset{\text{def}}{=} S_0$$

Załóżmy, że zostały zdefiniowane przedziały $J_0, J_1, \ldots, J_n$.
Niech $l_n \overset{\text{def}}{=} \min\{i : S_i \subseteq I_0 \setminus (K_0 \cup K_1 \cup \ldots \cup K_n)\}$. Wówczas

$$J_{n+1} \overset{\text{def}}{=} S_{l_n}.$$

J_{n+1} jest pierwszym z elementów $\mathcal{S}$ rozłącznym z każdym z przedziałów K_i dla $i = 0, 1, \ldots, n$.
W ten sposób skonstrułowaliśmy ciąg $\langle J_i \rangle_{i \in \omega}$. Pokażemy, że spełnia on własności (i) oraz (ii).
ad(i). Niech $i, j \in \omega$ oraz $i < j$. Ponieważ $K_j \subseteq I_0 \setminus (K_0 \cup \ldots \cup K_i \cup \ldots \cup K_{j-1})$, więc

$$K_j \cap K_i = \emptyset.$$

ad(ii). Przypuśćmy niewprost, że zbiór $\cup K_i^0$ nie jest gęsty w I_0. To znaczy, że istnieje przedział $L \subseteq I_0$ taki, że

$$\bigcup K_i^0 \cap L = \emptyset.$$

Niech $l_L \overset{\text{def}}{=} \min\{i : S_i \subseteq L\}$. S_{l_L} jest pierwszym z przedziałów w ciągu $\mathcal{S}$, który zawiera się w L. Ponieważ $S_{l_L} \subseteq I_0 \setminus (K_0 \cup K_1 \cup \ldots \cup K_{l_L - 1})$, więc

$$S_{l_L} \neq J_i \quad (i = 0, \ldots, l_L - 1).$$

A stąd i z definicji $\langle J_i \rangle_{i \in \omega}$ wnioskujemy, że

$$J_{l_L} = S_{l_L}.$$

Dalej mamy

$$(\bigcup K_i^0 \cap L) \supseteq K_{l_L}^0 \cap L = K_{l_L}^0 \neq \emptyset \qquad \text{(sprzeczność)}.$$

Dla każdego z przedziałów K_i z osobna możemy teraz określić ciąg przedziałów $\langle J_{ij} \rangle_{j\in\omega}$ taki, że $K_{ij} \overset{\text{def}}{=} g(I_0, J_i, K_i, J_{ij})$ są wzajemnie rozłączne dla $j \in \omega$ oraz zbiór $\cup_j K_{ij}^0$ jest gęsty w K_i^0. Ponieważ $\cup_i K_i^0$ jest gęsty w I_0, więc $\cup_{i,j} K_{ij}^0$ jest gęsty w I_0. Postępując tak dalej zdefiniujemy indukcyjnie dwie rodziny $\langle J_{i_0\ldots i_n} \rangle_{n,i_k\in\omega}$ oraz $\langle K_{i_0\ldots i_n} \rangle_{n,i_k\in\omega}$ o własnościach:

(3) $$K_{i_0\ldots i_n} = g(I_0, J_{i_0}, K_{i_0}, \ldots, J_{i_0\ldots i_n}),$$

(4) $$J_{i_0\ldots i_{n+1}} \subseteq K_{i_0\ldots i_n}^0,$$

(5)
$$\forall_n \left(\langle K_{i_0\ldots i_n} \rangle \text{ jest rodziną rozłączną} \quad \text{i} \quad \bigcup_{i_0\ldots i_n} K_{i_0\ldots i_n}^0 \text{ jest gęsty w } I_0 \right).$$

Pokażemy teraz, że dla dowolnego ciągu liczb naturalnych $\langle i_n \rangle$ zachodzi $\cap_n K_{i_0\ldots i_n} \cap A = \emptyset$.
Ustalmy $\langle i_n \rangle \in \omega^\omega$. Przyjmijmy

$$I_{2n+1} := J_{i_0\ldots i_n}, \quad I_{2n+2} := K_{i_0\ldots i_n} \; n \in \omega.$$

Ponieważ zstępujący ciąg $\langle I_n \rangle$ jest wynikiem gry $\langle I_0, A \rangle$, w której (II) grał zgodnie z g, więc

$$\bigcap_n K_{i_0\ldots i_n} \cap A = \emptyset.$$

Niech teraz $G_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i_0 \ldots i_n} K^0_{i_0 \ldots i_n}$ dla $n \in \omega$. Oznaczmy przez E zbiór $\bigcap_n G_n$. Pokażemy, że $E \cap A = \emptyset$.
Niech $x \in E$, czyli $\forall_n\ x \in G_n$. Z własności (3), (4) i (5) mamy, że

$$\exists_{\langle n_i \rangle} \forall_k\ x \in K^0_{n_0 \ldots n_k}.$$

Na podstawie wcześniejszego rozumowania wiemy, że $\bigcap_k K_{n_0 \ldots n_k} \cap A = \emptyset$. A ponieważ $x \in \bigcap_k K^0_{n_0 \ldots n_k}$, więc $x \in I_0 \setminus A$. Wobec dowolności x mamy $E \subseteq I_0 \setminus A$. Dalej otrzymujemy

$$A = I_0 \setminus (I_0 \setminus A) \subseteq I_0 \setminus E = \bigcup_n (I_0 \setminus G_n).$$

Z tego, że G_n jest zbiorem otwartym i gęstym (własność (5)) otrzymujemy, że $I_0 \setminus G_n$ jest domkniętym zbiorem brzegowym, a więc zbiorem nigdziegęstym. A wobec tego A jest zbiorem I-kategorii. ∎

Twierdzenie 1 mówi, że zbiory zdeterminowane dla (II) są zbiorami małymi w sensie kategorii. Ale czy zbiory te są małe również w sensie miary?

Twierdzenie 2 (Zindulka). *Każdą przestrzeń metryczną X bez punktów izolowanych, dla której jest określona skończona miara borelowska μ, można rozbić na sumę dwóch zbiorów: I-kategorii i μ-miary zero.*

Nam wystarcza twierdzenie w przypadku gdy X jest przedziałem, a to jest
oczywiste. Wystarczy wziąć dowolny zbiór typu G_δ miary 0 zawierający zbiór liczb wymiernych oraz jego uzupełnienie.

Twierdzenie 2 wynika z dwóch lematów, które sformułujemy i udowodnimy poniżej (patrz [16]).

Lemat 1. *Jeśli przestrzeń metryczna X zawiera podzbiór I-kategorii gęsty i μ jest borelowską miarą skończoną, to X można rozbić na sumę dwóch zbiorów: I-kategorii i μ-miary zero.*

Dowód.

Niech A będzie zbiorem I-kategorii gęstym w X. Możemy przyjąć, że $A = \bigcup A_n$, gdzie A_n domknięty i nigdziegęsty, czyli A jest typu F_σ. Uzasadnimy teraz, że istnieje zbiór $G \in \mathcal{G}_\delta$ taki, że $A \subseteq G$ oraz $\mu(A) = \mu(G)$. Ponieważ A_n jest typu G_δ, więc dla każdego $i \in \omega$ istnieje zbiór otwarty $G_{n,i} \supseteq A_n$ o własności $\mu(G_{n,i}) \leq \mu(A_n) + \frac{1}{2^{n+1}i}$. Jeśli teraz zdefiniujemy $\tilde{G}_i := \bigcup_n G_{n,i}$ oraz $G := \bigcap_i \tilde{G}_i$, to otrzymamy

$$\mu(G) \leq \mu(\tilde{G}_i) = \mu(\bigcup_n A_n) + \mu(\bigcup_n G_{n,i} \setminus \bigcup_n A_n) \leq$$

$$\leq \mu(\bigcup_n A_n) + \mu(\bigcup_n (G_{n,i} \setminus A_n)) \leq \mu(A) + \frac{1}{i} \text{ dla każdego } i.$$

To znaczy, że $\mu(G) = \mu(A)$. Zdefiniujmy zbiory $X_1 \stackrel{\text{def}}{=} A \cup G'$ oraz $X_2 \stackrel{\text{def}}{=} G \setminus A$. Tworzą one szukane rozbicie. Rzeczywiście. X_2 jest μ-miary zero, a X_1 jest I-kategorii, gdyż G' jest I-kategorii jako uzupełnienie zbioru gęstego typu G_δ. ∎

Lemat 2. *Każda przestrzeń metryczna X bez punktów izolowanych zawiera podzbiór I-kategorii gęsty.*

Dowód.

Z własności przestrzeni metrycznej wiadomo, że X posiada bazę σ-dyskretną (patrz [2], roz.4 §4 Tw.2), tzn. taką bazę $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, że

$$\forall_n \ \forall_{x \in X} \ \exists_{U-otocz\ x} \ \overline{\overline{\{B \in \mathcal{B}_n : B \cap U \neq \emptyset\}}} \leq 1.$$

Niech $x_B \in B$ dla każdego $B \in \mathcal{B}$. Określamy

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x_B : B \in \mathcal{B}_n\} \quad (n \in \omega) \quad \text{oraz} \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup A_n.$$

Z własności $\mathcal{B}_n$ wynika, że A_n nie ma punktów skupienia. Stąd $X \setminus A_n$ jest gęsty w X (X nie ma punktów izolowanych). Wobec tego A_n jest nigdziegęsty, więc A jest I-kategorii. Z definicji A wynika, że jest on gęsty. ∎

Twierdzenie 2 daje odpowiedą na wcześniej postawione pytanie. Istnieje $A_0 \subseteq I_0$ I-kategorii i taki, że $m(A_0) = m(I_0)$. A to znaczy, że (II) ma zwycięską strategię w grze $\langle I_0, A_0 \rangle$. Jest to ciekawe z tego powodu, że "zadaniem" gracza (II) jest "ominąć" dany zbiór, a okazuje się to możliwe w tym przypadku, mimo dużej miary A_0.

Przed podaniem twierdzenia charakteryzującego zbiory zdeterminowane dla (I) zdefiniujemy pojęcie zbioru I-kategorii w punkcie.

Definicja. *Zbiór $E \subseteq \mathbf{R}$ nazywamy I-kategorii w punkcie $x \in \mathbf{R}$, jeśli istnieje otoczenie U_x punktu x takie, że zbiór $U_x \cap E$ jest I-kategorii w $\mathbf{R}$.*

Zbiór punktów $x \in \mathbf{R}$, w których E jest I-kategorii oznaczymy przez E_I.

Dobrze znane są następujące fakty (patrz [6], roz.12 §8).

Fakt 1. *Zbiór E_I jest zbiorem otwartym.*

Dowód.

Jeśli $x \in E_I$ oraz U_x takie otoczenie x, że $U_x \cap E$ jest I-kategorii, to $U_x \subseteq E_I$. ∎

Fakt 2. *Zbiór $E \cup E_I$ nie jest zbiorem I-kategorii w żadnym punkcie, tzn.*

$$(E \cup E_I)_I = \emptyset.$$

Dowód.

Przypuśćmy, że $(E \cup E_I)_I \neq \emptyset$. Istnieje więc $x \in \mathbf{R}$ oraz otoczenie U_x punktu x takie, że

$$U_x \cap (E \cup E_I) \text{ jest I-kategorii.}$$

Każdy podziór $\mathbf{R}$ otwarty i niepusty jest II-kategorii, więc $U_x \cap E_I = \emptyset$ (E_I jest otwarty-Fakt 1). Dalej, ponieważ $U_x \cap E$ jest I-kategorii, więc $x \in E_I$, co jest sprzeczne z tym, że $U_x \cap E_I = \emptyset$. ∎

Fakt 3. *Zbiór $E \cap E_I$ jest zbiorem I-kategorii.*

Dowód.

Rozpatrzmy następującą rodzinę

$\mathcal{W} = \{I : I$ -przedział o końcach wymiernych i $I \cap E$ jest I-kategorii$\}$.

Z określenia widać, że jest to rodzina przeliczalna. Zachodzi

$$E \cap E_I = E \cap \bigcup \mathcal{W} = \bigcup_{I \in \mathcal{W}} E \cap I.$$

Stąd wynika, że $E \cap E_I$ jest I-kategorii. ∎

Twierdzenie 3 [1]. *Gracz (I) posiada zwycięską strategię w grze $\langle I_0, A \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_0 \setminus A$ jest zbiorem I-kategorii w pewnym punkcie I_0.*

[1] patrz [13], Tw. 6.2

Dowód.

Niech f będzie zwycięską strategią gracza (I). Możemy przyjąć, że $|f(I_0, \ldots, I_{2n+2})| \leq \frac{1}{2}|I_{2n+2}|$ dla dowolnego ciągu $I_0 \supseteq \ldots \supseteq I_{2n+2}$. Wówczas funkcja $g(I_1, \ldots, I_{2n+2}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(I_0, I_1, \ldots, I_{2n+2})$ jest strategią gracza (II) w grze $\langle I_1, I_1 \setminus A \rangle$, gdzie $I_1 = f(I_0)$. Jeśli ciąg $\langle I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots \rangle$ jest zgodny z g, to $\bigcap_1^\infty I_n \cap A = \bigcap_0^\infty I_n \cap A \neq \emptyset$, ale ponieważ $\bigcap_0^\infty I_n$ jest jednoelementowy ($|(I_n)| \to 0$), więc $\bigcap_1^\infty I_n \subseteq A$. A to znaczy, że g jest zwycięską strategią (II). Czyli $I_1 \setminus A$ jest I-kategorii (Tw. 1).

Z drugiej strony, jeśli $I_0 \setminus A$ jest zbiorem I-kategorii w pewnym punkcie I_0, to istnieje przedział $I \subseteq I_0$ taki, że zbiór $I \cap (I_0 \setminus A) = I \cap A'$ jest I-kategorii.
Rozważmy grę $\langle I, I \cap A' \rangle$. Oczywiście gra $\langle I, I \cap A' \rangle$ jest zdeterminowana dla (II). Jeśli teraz w grze $\langle I_0, A \rangle$ gracz (I) w pierwszym ruchu wybierze przedział I, a następnie będzie grał zgodnie ze zwycięską strategią (II) w grze $\langle I, I \cap A' \rangle$, to zapewni sobie wygraną. ∎

Twierdzenia Tw.1 oraz Tw.3 w pełni określają zbiory, dla których jeden z graczy posiada zwycięską strategię. Zbiory o tej własności nazywamy **zdeterminowanymi** w grze Banacha-Mazura. Pojawia się pytanie, czy istnieją zbiory niezdeterminowane. Okazuje się, że (w ZFC) można skonstrułować zbiór niezdeterminowany. Niech B będzie zbiorem Bernsteina. Wiadomo, że każdy ze zbiorów B i B' ma przekrój niepusty z dowolnym nieprzeliczalnym zbiorem domkniętym na prostej. A to znaczy, że dla dowolnego przedziału I, ani $I \cap B$, ani $I \cap B'$ nie zawiera nieprzeliczalnego zbioru typu G_δ (każdy taki zbiór zawiera zbiór domknięty nieprzeliczalny). Z tego zaś wynika, że żaden ze zbiorów $I \cap B$, ani $I \cap B'$ nie jest I-kategorii. Czyli widać (Tw.1, Tw.3), że gra $\langle I_0, I_0 \cap B\rangle$ nie jest zdeterminowana dla żadnego z graczy.

Twierdzenie 4 [2]**.** *Jeśli każdy podzbiór I_0 jest zdeterminowany w grze Banacha- Mazura, to każdy podzbiór I_0 posiada własność Baire'a.*

Dowód.

Niech $A \subseteq I_0$ będzie dowolnym zbiorem. Wiadomo, że $A' \cup (A')_I$ nie jest zbiorem I-kategorii w żadnym punkcie (Fakt 2). Stąd zbiór $A^* \stackrel{\text{def}}{=} I_0 \setminus (A' \cup (A')_I)$ nie jest zdeterminowany dla (I). Stąd i z założenia twierdzenia A^* jest I-kategorii. Dalej mamy

$$A^* = I_0 \setminus (A' \cup (A')_I) = I_0 \cap A \cap ((A')_I)' = A \cap ((A')_I)',$$

$$A = A \cap (A')_I \quad \cup \quad A \cap ((A')_I)'.$$

Wobec tego, aby pokazać, że A ma własność Baire'a, wystarczy stwierdzić, że
$A \cap ((A')_I)$ ma własność Baire'a. Dalej otrzymujemy

$$A \cap (A')_I = (A')_I \setminus (A' \cap (A')_I).$$

Czyli przedstawiliśmy $A \cap (A')_I$ jako różnicę zbioru otwartego i I-kategorii ($A' \cap (A')_I$ jest I-kategorii-Fakt 3), a to znaczy, że $A \cap (A')_I$ ma własność Baire'a. ■

Oczywiście twierdzenie to nie wnosi nic ciekawego, jeśli przyjąć pełną wersję AC, gdyż wówczas jego poprzednik jest fałszywy. Powstaje także problem niesprzeczności przypuszczenia o zdeterminowaniu wszystkich zbiorów z aksjomatami ZF. Jest to zagadnienie złożone,

[2] patrz [9], str.208

a pewne rezultaty z nim związane omówiny w dalszej części pracy (§3 str. 26).

Na zakończenie tego rozdziału uogólninimy grę Banacha-Mazura. Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną podzbiorów I_0 taką, że każdy element $\mathcal{G}$ zawiera niepusty, otwarty podprzedział I_0 i na odwrót, tzn. każdy niepusty, otwarty podprzedział I_0 zawiera element rodziny $\mathcal{G}$. Ustalmy zbiór $A \subseteq I_0$. Gra $\langle I_0, A, \mathcal{G}\rangle$ jest określona następująco: gracze (I) i (II) wybierając na przemian elementy $\mathcal{G}$, określają nieskończony zstępujący ciąg $\langle G_0, G_1, \ldots\rangle$. Gracz (I) wygrywa, gdy $A \cap \bigcap G_n \neq \emptyset$. W przeciwnym przypadku wygrywa (II). Strategię oraz zdeterminowanie zbioru określa się analogicznie jak w grze $\langle I_0, A\rangle$. Okazuje się, że twierdzenia Tw.1 i Tw.3 przenoszą się na przypadek uogólnionej gry Banacha-Mazura. Twierdzenia te podajemy bez dowodu (można je znaleźć w [12]).

Twierdzenie 5. *Gra $\langle I_0, A, \mathcal{G}\rangle$ jest zdeterminowana dla (II) wtedy i tylko wtedy, gdy A jest I-kategorii.*

Twierdzenie 6. *Gra $\langle I_0, A, \mathcal{G}\rangle$ jest zdeterminowana dla (I) wtedy i tylko wtedy, gdy A jest I-kategorii w pewnym punkcie I_0.*

§2. **Gra szeregowa** $(\sum a_n, A)$**.**

Interesujące wydaje się rozważenie następującej gry nieskończonej. Niech $\sum a_n$ będzie zbieżnym szeregiem o wyrazach dodatnich oraz $A \subseteq \mathbf{R}$ pewnym zbiorem. Gra polega na wybieraniu na przemian przez dwóch graczy nieujemnych liczb rzeczywistych, przy czym liczba wybrana w n-tym ruchu nie może być większa od a_n. Podobnie jak w §1 graczy oznaczymy przez (I) i (II) (grę rozpoczyna (I)). Gracze w wyniku rozegrania gry określają szereg $\sum b_n$ taki, że $0 \leq b_n \leq a_n$ $(n \in \omega)$. Ponieważ $\sum_0^\infty b_n \leq \sum_0^\infty a_n$, więc szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Grę wygrywa (I), gdy $\sum_0^\infty b_n \in A$, w przeciwnym przypadku wygrywa gracz (II). Tak określoną grę oznaczymy przez $(\sum a_n, A)$. Ponieważ suma szeregu $\sum b_n$ należy do przedziału $I_{\Sigma a_n} := [0, \sum_0^\infty a_n]$, więc będziemy rozważać tylko zbiory $A \subseteq I_{\Sigma a_n}$.

Powróćmy do gry Banacha-Mazura. Zmodyfikujmy zasady gry $\langle I_{\Sigma a_n}, A\rangle$ przez narzucenie warunku na długość przedziałów wybieranych przez graczy. Niech $|I_n|=\sum_{k=n}^\infty a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Tak zmodyfikowaną grę oznaczać będziemy przez $\langle I_{\Sigma a_n}, A, \sum a_n\rangle$.

Fakt 1. *Gra $(\sum a_n, A)$ jest zdeterminowana dla (I) ((II)) wtedy i tylko wtedy, gdy gra $\langle I_{\Sigma a_n}, A, \sum a_n\rangle$ jest zdeterminowana dla (I) ((II)).*

Zanim udowodnimy ten fakt podamy określenie strategii w grze $(\sum a_n, A)$. Są to odpowiednio funkcje

$$f : \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n\in\omega} [0, a_0] \times \ldots \times [0, a_{2n+1}] \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R},$$

$$g : \bigcup_{n\in\omega} [0, a_0] \times \ldots \times [0, a_{2n}] \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}$$

spełniające warunki:

$$f(\emptyset) \in [0, a_0], \quad f(x_0, \ldots, x_{2n+1}) \in [0, a_{2n+2}] \quad (n \in \omega),$$

$$g(x_0, \ldots, x_{2n}) \in [0, a_{2n+1}] \quad (n \in \omega).$$

Dowód.

Niech $\sum b_n$ i $\langle I_n \rangle$ będą wynikami gier odpowiednio $(\sum a_n, A)$ oraz $\langle I_{\Sigma a_n}, A, \sum a_n \rangle$ takimi, że

$$(1) \qquad \sum_0^n b_k = c_{n+1} \quad (n \in \omega),$$

gdzie c_{n+1} oznacza lewy koniec przedziału I_{n+1}. Wobec tego, że $lim\ c_n \in \bigcap I_n$ oraz $\bigcap I_n$ jest jednoelementowy ($|I_n| \to 0$) otrzymujemy

$$(2) \qquad \sum_0^\infty b_n \notin A \quad \iff \quad \bigcap I_n \cap A = \emptyset.$$

Równość (1) wyznacza wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zwycięskimi strategiami danego gracza w jednej grze a zwycięskimi strategiami tego samego gracza w drugiej grze. Rzeczywiście, jeśli $\sum b_n$ jest zgodny ze zwycięską strategią gracza (I), to $\sum_0^\infty b_n \in A$. Z warunku (2) mamy, że $\bigcap I_n \cap A \neq \emptyset$. Gdy zaś $\langle I_n \rangle$ jest zgodny ze zwycięską strategią (I) w grze $\langle I_{\Sigma a_n}, A, \sum a_n \rangle$, to $\bigcap I_n \cap A \neq \emptyset$, więc wobec (2) $\sum_0^\infty b_n \in A$. Analogicznie w przypadku gracza (II).

Czyli pokazaliśmy, że dla strategii zwycięskiej danego gracza w jednej grze istnieje strategia zwycięska dla tego samego gracza w drugiej grze, co dowodzi Faktu 1. ∎

W grze Banacha-Mazura zbiory zdeterminowane dla (II) są I-kategorii. Ale okazuje się, że w grze $\langle I_{\Sigma a_n}, A, \sum a_n \rangle$ nawet takie zbiory są ”zbyt duże”, aby (II) mógł je ”ominąć”. Bez narzucenia odpowiedniego warunku na szereg $\sum a_n$ nawet dla zbioru przeliczalnego może nie istnieć strategia zwycięska dla gracza (II).

Definicja. *Mówimy, że szereg $\sum a_n$ spełnia własność (*), jeśli istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\langle n_i \rangle$ taki, że dla każdego i*

$$(a_{2n_i+1}+a_{2n_i+3}\ldots+a_{2n_i+(2k+1)}+\ldots) > (a_{2n_i+2}+a_{2n_i+4}\ldots+a_{2n_i+2k}+\ldots).$$

Twierdzenie 1. *Jeśli szereg $\sum a_n$ spełnia własność (*) i A jest zbiorem przeliczalnym, to gra $(\sum a_n, A)$ jest wygrana dla (II).*

Dowód.

Niech $A = \langle \alpha_i \rangle$ i niech $\langle n_i \rangle$ będzie danym ciągiem z definicji własności (*). Możemy przyjąć, że $\langle n_i \rangle$ spełnia warunek

$$(a_{2n_i+1} + a_{2n_i+3} \ldots + a_{2n_{i+1}-1}) \;>\; \frac{1}{2}(a_{2n_i+1} + a_{2n_i+2} \ldots + a_{2n_i+k} + \ldots)$$

(wystarzy wybrać te elementy ciągu $\langle n_i \rangle$, które spełniają tą własność, a następnie przenumerować).

Określimy teraz strategię g dla gracza (II).

$$g(x_0,\ldots,x_{2k}) := 0 \quad \text{dla} \quad k = 0,\ldots,n_0-1,$$

$$g(x_0,\ldots,x_{2k}) := \begin{cases} a_{2k+1}, & \text{gdy } \alpha_i < \sum_0^{2n_i} x_n + \frac{1}{2}\sum_{2n_i+1}^{\infty} a_n \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\text{dla} \quad k = n_i,\ldots,n_{i+1}-1 \quad (i = 0,1\ldots).$$

Niech teraz $\langle b_n \rangle$ będzie wynikiem gry zgodnym z g, a α_i dowolnym ustalonym elementem A. Mogą zajść dwa przypadki.

(1^0) $\quad \alpha_i < \sum_0^{2n_i} b_n + \frac{1}{2}\sum_{2n_i+1}^{\infty} a_n$

Wtedy $b_k = a_k$ dla $k = 2n_i + 1, 2n_i + 3, \ldots, 2n_{i+1} - 1$. Stąd

$$\sum_0^\infty b_n \geq \sum_0^{2n_i} b_n + a_{2n_i+1} + \ldots + a_{2n_{i+1}-1} > \sum_0^{2n_i} b_n + \frac{1}{2} \sum_{2n_i+1}^\infty a_n > \alpha_i \ .$$

(2^0) $\alpha_i \geq \sum_0^{2n_i} b_n + \frac{1}{2}\sum_{2n_i+1}^\infty a_n$
Wtedy $b_k = 0$ dla $k = 2n_i + 1,\ 2n_i + 3, \ldots,\ 2n_{i+1} - 1$. Stąd

$$\sum_0^\infty b_n \leq \sum_0^{2n_i} b_n + a_{2n_i+2} + \ldots + a_{2n_{i+1}-2} + \sum_{2n_{i+1}}^\infty b_n \leq$$

$$\leq \sum_0^{2n_i} b_n - a_{2n_i+1} - \ldots - a_{2n_{i+1}-1} + \sum_{2n_i+1}^\infty a_n < \sum_0^{2n_i} b_n + \frac{1}{2} \sum_{2n_i+1}^\infty a_n \leq \alpha_i \ .$$

Czyli $\sum_0^\infty b_n \neq \alpha_i$, co wobec dowolności α_i znaczy, że $\sum_0^\infty b_n \notin A$.

■

Jeśli w definicji własności (*) zastąpić ostrą nierówność przez słabą, to powyższe twierdzenie nie będzie prawdziwe. Podamy przykład, który to uzasadnia.

Przykład.

Rozważmy następujący szereg

$$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \ldots .$$

(tzn. pierwszym wyrazem jest 1, a następnie parami występują wyrazy szeregu $\sum \frac{1}{2^n}$)

Niech A=$\{2\}$. Z tak zdefiniowanymi szeregiem oraz zbiorem A, rozpatrzmy grę $(\sum a_n, A)$. Jeśli gracz (I) w pierwszym ruchu wybierze 1, natomiast w kroku $2n$ taką liczbę b_{2n}, aby jej suma z wcześniej wybraną przez (II) wynosiła $\frac{1}{2^n}$, wówczas w wyniku gry otrzymamy szereg $\sum b_n$ o sumie równej

$$b_0 + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{(b_{2n-1} + b_{2n})}_{\frac{1}{2^n}} + \ldots = \sum_0^\infty \frac{1}{2^n} = 2.$$

Czyli grę wygrywa (I) (nawet zbiór jednoelementowy okazuje się "za duży" dla gracza (II)).

Ponieważ w naszym przykładzie szereg $\sum a_n$ spełnia własność

$$\forall_i \ (a_{2i+1} + a_{2i+3} \ldots + a_{2i+(2k+1)} + \ldots) \ = \ (a_{2i+2} + a_{2i+4} \ldots + a_{2i+2k} + \ldots),$$

więc zastąpienie znaku " $>$ " przez " $\geq$ " w def. własnści (*) spowoduje, że Tw.1 nie będzie prawdziwe.

Wniosek. *Jeśli istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\langle n_i \rangle$ taki, że*

$$\forall_i \ (a_{2n_i} + a_{2n_i+2} \ldots + a_{2n_i+2k} + \ldots) \ > \ (a_{2n_i+1} + a_{2n_i+3} \ldots + a_{2n_i+2k+1} + \ldots)$$

(tą własność szeregu oznaczymy przez (**)) oraz zbiór $I_{\Sigma a_n} \setminus A$ jest przeliczalny, to gra $(\sum a_n, A)$ jest wygrana dla (I).

Dowód.

Wystarczy rozpatrzyć grę $(\sum a'_n, A^*)$, gdzie

$$a'_n \stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} \ (n \in \omega), \quad A^* \stackrel{\text{def}}{=} I_{\Sigma a_n} \setminus A.$$

Szereg $\sum a'_n$ spełnia własność (*) i zbiór A^* jest przeliczalny, więc z Tw.1 gra $(\sum a'_n, A^*)$ jest wygrana dla (II). Jeśli teraz w naszej wyjściowej grze (I) wybierze w pierwszym ruchu $b_0 = 0$, natomiast dalej będzie grał zgodnie ze zwycięską strategią (II) w grze $(\sum a'_n, A^*)$, to suma otrzymanego szeregu $\sum b_n$ będzie elementem zbioru $I_{\Sigma a_n} \setminus A^* = A$. ∎

Na podstawie powyższego wniosku oraz Tw.1 można stwierdzić, że jeśli szereg $\sum a_n$ spełnia własności (*) i (**), to rodzina zbiorów zdeterminowanych w grze szeregowej zawiera σ-ciało generowane przez zbiory przeliczalne. A to znaczy, że rodzina ta ma moc co najmniej $2^{\aleph_0}$.

W dalszej części tego paragrafu ograniczymy się do przypadku, gdy szereg $\sum a_n$ jest szeregiem potęgowym. Zauważmy, że szereg potęgowy $\sum \alpha^n$ ($\alpha \in (0,1)$) spełnia obie wcześniej określone własności ((*) i (**)), gdyż

$$\forall_{i \in \omega} \ \ (\alpha^i + \alpha^{i+2} + \alpha^{i+4} + \dots) > (\alpha^{i+1} + \alpha^{i+3} + \alpha^{i+5} + \dots) \quad .$$

Dla tego typu gier podamy przykład zbioru zdeterminowanego dla gracza (I).

Definicja. *Liczbę $x \in \mathbf{R}$ nazywamy źle aproksymowalną (ang. badly approximable), jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że*

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^2},$$

dla dowolnych liczb całkowitych p, q $(q \neq 0)$.

Zauważmy, że w powyższej definicji wystarczy rozpatrywać liczby względnie pierwsze. Jesli $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$, przy czym $NWD(p,q) = 1$ i $|x - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^2}$, to

$$|x - \frac{p_1}{q_1}| = |x - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^2} \geq \frac{c}{q_1^2}, \quad \text{gdyż } \ |q| \leq |q_1|.$$

Wiadomo, że liczba niewymierna jest źle aproksymowalna wtedy i tylko wtedy, gdy mianowniki jej ułamka łańcuchowego są ograniczone (patrz odnośnik w [14], str. 178). Czyli przykładem liczby źle aproksymowalnej jest liczba $\sqrt{2}$, gdyż $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

Zbiór liczb źle aproksymowalnych oznaczymy przez $\mathbf{\Theta}$.

Interesująca jest następująca własność zbioru $\mathbf{\Theta}$.

Fakt 2. *Θ jest zbiorem I-kategorii.*

Dowód.

Pokażemy, że $\Theta = \bigcup \Theta_n$, gdzie Θ_n nigdziegęsty. Zdefiniujmy

$$\Theta_n = \{x : \forall_{\frac{p}{q}\ q\neq 0}\ \ |x - \frac{p}{q}| > \frac{1}{n+1} q^{-2}\}.$$

Równość $\Theta = \bigcup \Theta_n$ oczywiście zachodzi. Teraz uzasadnimy, że zbiór Θ_n jest nigdziegęsty ($n = 0, 1, \ldots$). Niech I dowolny przedział. Istnieje $\frac{p}{q} \in I^0$. Wówczas przedział $I \cap [\frac{p}{q} - \frac{1}{n+1} q^{-2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{n+1} q^{-2}]$ jest rozłączny z Θ_n, co dowodzi nigdziegęstości Θ_n. ∎

Twierdzenie 2. *Θ jest zbiorem miary Lebesgue'a zero.*

Twierdzenie to podajemy bez dowodu (patrz odnośnik w [15] str. 178).

Niech $\alpha \in (0, 1)$ będzie dowolne ustalone. Przez Θ_α oznaczymy zbiór $I_{\sum \alpha^n} \cap \Theta$.

Twierdzenie 3 [3]**.** *Gra $(\sum \alpha^n, \Theta_\alpha)$ jest wygrana dla (I).*

Przed przystąpieniem do dowodu wprowadzimy pewne oznaczenia i podamy pomocniczy lemat.

$\gamma := (1-\alpha)^2$;

a_n, b_n, s_n oznaczają odpowiednio lewy i prawy koniec oraz środek przedziału I_n ;

$\rho_i := \alpha^i \rho$, gdzie $\rho = \sum_0^\infty \alpha^n$;

$L(I_n)$ oznacza przedział o długości $\alpha |I_n|$ i lewym końcu takim jak I_n, czyli $L(I_n) = [a_n, a_n + \alpha\rho_n]$;

[3] dowód tego twierdzenia jest wzorowany na dowodzie Tw.3 w [14]

analogicznie $P(I_n) := [b_n - \alpha\rho_n, b_n]$.
Niech n_0 i t_0 takie liczby naturalne, że

$$n_0 \text{ jest parzysta i } \rho_{n_0} \leq \frac{\alpha^2\gamma}{4}, \quad \frac{\alpha^2\gamma}{2} \leq \left(\alpha^2\right)^{t_0} < \frac{\gamma}{2}.$$

(istnienie tych liczb wynika z tego ,że $0 < \alpha < 1$ oraz $\rho_n \to 0$).
Niech $R := \alpha^{-t_0}$ oraz $\delta := \frac{1}{4}\rho_{n_0}\gamma$.

Przy takich określeniach możemy już podać

Lemat. *Jeśli $|I| \leq \alpha^{2nt_0}\rho_{n_0}$, to istnieje co najwyżej jeden ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ taki, że*

$$R^n \leq q < R^{n+1} \quad \textit{oraz} \quad \exists_{x \in I} \ |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{\delta}{q^2}.$$

Dowód Lematu.

Przypuśćmy, że istnieją dwie różne liczby wymierne $\frac{p}{q}$ i $\frac{p_1}{q_1}$ takie, że

$$R^n \leq q, q_1 < R^{n+1} \quad \text{oraz} \quad \exists_{x, x_1 \in I} \ |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{\delta}{q^2} \ |x_1 - \frac{p_1}{q_1}| \leq \frac{\delta}{q_1^2}.$$

Wówczas mamy

$$|\frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1}| \leq |x - \frac{p}{q}| + |x - x_1| + |x_1 - \frac{p_1}{q_1}| \leq \delta(q^{-2} + q_1^{-2}) + |I| \leq$$
$$\leq 2\delta R^{-2n} + \alpha^{2nt_0}\rho_{n_0} = 2\delta R^{-2n} + R^{-2n}\rho_{n_0} \leq 2\rho_{n_0}R^{-2n} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\alpha^2\gamma R^{-2n} = \frac{1}{2}\alpha^2\gamma(\alpha^2)^{-t_0}R^{-2n-2} \leq R^{-2n-2}.$$

Z drugiej strony

$$|\frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1}| \geq \frac{1}{qq_1} > R^{-2(n+1)}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi Lematu. ∎

Dowód Twierdzenia 3.

Wobec Faktu 1 wystarczy udowodnić, że gra $\langle I_{\Sigma\alpha^n}, \Theta_\alpha, \sum \alpha^n \rangle$ jest wygrana dla gracza (I).

Przedziały $I_1, I_3, \ldots, I_{n_0-1}$ gracz (I) może wybierać w dowolny sposób. Podamy teraz jak (I) powinien wybierać przedziały $I_{n_0+2nt_0+1}$, $I_{n_0+2nt_0+3}, \ldots, I_{n_0+2(n+1)t_0-1}$ dla $n \in \omega$.

Niech $n \in \omega$ dowolne ustalone. Z lematu wiemy, że istnieje co najwyżej jeden ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ taki, że

$$R^n \leq q < R^{n+1},$$

$$\exists_{x \in I_{n_0+2nt_0}} \ |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{\delta}{q^2}.$$

Czyli elementy $x \in I_{n_0+2nt_0}$, które mają powyższą własność muszą należeć do pewnego przedziału C_n o długości

$$|C_n| \leq \frac{2\delta}{q^2} \leq 2\delta R^{-2n} = 2\delta\alpha^{2nt_0} \leq 2\frac{\rho_{n_0}\gamma}{4}\alpha^{2nt_0} = \frac{\gamma\rho_{n_0+2nt_0}}{2}.$$

Mogą zajść dwa przypadki: albo środek C_n leży po prawej albo po lewej stronie środka przedziału $I_{n_0+2nt_0}$. Rozpatrzmy pierwszą możliwość. Wówczas

$$x \in C_n \Rightarrow x \geq s_{n_0+2nt_0} - \frac{\gamma\rho_{n_0+2nt_0}}{4}.$$

W tym przypadku

$$I_{n_0+2nt_0+2k+1} \stackrel{\text{def}}{=} L(I_{n_0+2nt_0+2k}) \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, t_0 - 1.$$

Wobec takiego określenia mamy

$$s_{n_0+2nt_0+1} = s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}(1-\alpha),$$

$$s_{n_0+2nt_0+2} \leq s_{n_0+2nt_0+1} + \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}(1-\alpha)\alpha \leq$$

$$\leq s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}((1-\alpha)-(1-\alpha)\alpha) = s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma.$$

Stąd mamy, że $s_{n_0+2nt_0+2} \leq s_{n_0+2nt_0}$. Analogicznie otrzymujemy

$$s_{n_0+2nt_0+2i} \leq s_{n_0+2nt_0+2(i-1)}, \quad i = 2, \ldots, t_0.$$

Stąd

$$s_{n_0+2nt_0+2t_0} \leq s_{n_0+2nt_0+2} \leq s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma.$$

Zatem

$$b_{n_0+2nt_0+2t_0} \leq s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma + \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\alpha^{2t_0} <$$

$$< s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{2}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma + \frac{1}{4}\rho_{n_0+2nt_0}\gamma = s_{n_0+2nt_0} - \frac{1}{4}\gamma\rho_{n_0+2nt_0}.$$

Stąd wynika, że C_n jest rozłączny z $I_{n_0+2(n+1)t_0}$.

Jeśli zachodzi drugi przypadek (tzn. środek C_n leży po lewej stronie środka $I_{n_0+2nt_0}$), to określamy

$$I_{n_0+2nt_0+2k+1} \stackrel{\text{def}}{=} P(I_{n_0+2nt_0+2k}) \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, t_0 - 1.$$

Podobnie jak w pierwszym przypadku możemy uzasadnić, że C_n jest rozłączne z $I_{n_0+2(n+1)t_0}$.

Niech teraz ciąg $\langle I_n \rangle$ będzie wynikiem gry, w której (I) grał zgodnie z wyżej opisaną strategią oraz $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ będzie dowolną liczbą wymierną. Wówczas istnieje n takie, że $R^n \leq q < R^{n+1}$. Ze sposobu określenia strategii wynika, że

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{\delta}{q^2} \quad \text{dla wszystkich } \; x \in I_{n_0+2(n+1)t_0}.$$

To dowodzi, że gra $\langle I_{\sum \alpha^n}, \Theta_\alpha, \sum \alpha^n \rangle$ jest wygrana przez (I). ∎

Powyższe twierdzenie jest interesujące, gdyż wskazuje, jak narzucenie warunku na długość przedziałów w grze Banacha-Mazura zmienia własności tej gry. Wiemy, że jeśli A jest I-kategorii, to gra $\langle I, A\rangle$ jest wygrana dla (II). Okazuje się, że w grze $\langle I_{\Sigma a_n}, A, \sum \alpha^n\rangle$ gracz (I) może posiadać zwycięską strategię nawet w przypadku, gdy A jest I-kategorii.

§3. **Aksjomat determinacji.**

3.1 **Sformułowanie.**

Aksjomat determinacji AD został sformułowany przez H.Steinhusa oraz J.Mycielskiego w roku 1962 (patrz [10]). W celu sformułowania tego aksjomatu rozważymy następującą grę nieskończoną. Niech X będzie danym zbiorem. Ustalmy podzbiór $Y \subseteq X^\omega$ (czyli Y jest pewnym zbiorem nieskończonych ciągów elementów zbioru X). Reguły gry $G_X(Y)$ są następujące: gracze (I) i (II) na przemian wybierają elementy zbioru X (rozpoczyna gracz (I)). Czyli w wyniku rozegrania gry gracze określają ciąg $\langle x_0, x_1, \ldots \rangle \in X^\omega$. Gra jest wygrana przez (I), gdy ciąg ten jest elementem zbioru Y, w przeciwnym przypadku wygrywa (II). Oczywiście w tym przypadku strategiami będą funkcje o wartościach w zbiorze X i określone na zbiorach:

$$\bigcup_n X^{2n} \quad \text{w przypadku gracza (I),}$$

$$\bigcup_n X^{2n+1} \quad \text{w przypadku gracza (II).}$$

Podamy teraz pewne fakty dotyczące gry $G_2(Y)$ ($2 = \{0, 1\}$). Problem charakteryzacji zbiorów zdeterminowanych w tej grze zaangażował wielu matematyków. Mycielski i Zięba udowodnili, że dla każdego podzbioru Y otwartego lub domkniętego w przestrzeni Cantora 2^ω gra $G_2(Y)$ jest zdeterminowana. Dalej dowodzono zdeterminowanie tej gry dla większych rodzin zbiorów ($\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$, $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$). Bardzo trudny okazał się problem zdeterminowania zbiorów borelowskich. Po parudziesięciu latach od postawienia tego problemu Martin udowodnił (w ZFC), że dla każdego zbioru borelowskiego $Y \subseteq 2^\omega$ gra $G_2(Y)$ jest zdeterminowana. Dowód tego twierdzenia jest trudny, ale jego idea polega na określeniu równoważnej gry na zbiorze otwartym.[4]

AKSJOMAT DETERMINACJI AD. *Dla każdego podzbioru $Y \subseteq 2^\omega$ gra $G_2(Y)$ jest zdeterminowana (tzn. jeden z graczy posiada strategię wygrywającą).*

Zauważmy, że istnienie strategii wygrywającej dla (I) w grze $G_2(Y)$ możemy wyrazić następująco:

$$\exists_{x_0} \forall_{x_1} \exists_{x_2} \forall_{x_3} \dots \quad \langle x_n \rangle \in Y.$$

Podobnie możemy wyrazić istnienie zwycięskiej strategii dla (II)

$$\forall_{x_0} \exists_{x_1} \forall_{x_2} \exists_{x_3} \dots \quad \langle x_n \rangle \notin Y.$$

Wobec tego pewnym argumentem za przyjęciem aksjomatu detemi-nacji może być prawo logiczne $\exists_x \forall_y P \vee \forall_x \exists_y \neg P$. Oczywiście może to mieć wpływ tylko na "prywatny" stosunek matematyka do tego aksjomatu, natomiast problem miejsca AD wśród pozostałych aksjomatów teorii mnogości (niesprzeczność,niezależność -zagadnienie to omówimy dalej) wymaga już dogłębnych badań.

3.2 Pewne równoważne formy oraz konsekwencje AD.

Zmodyfikujmy grę $G_X(Y)$ następująco: w grze $G^*_X(Y)$ gracz (I) może wybierać dowolny skończony ciąg elementów zbioru X (również pusty), w grze $G^{**}_X(Y)$ obaj gracze wybierają dowolny skończony niepusty ciąg elementów zbioru X. Oznaczmy przez $\mathcal{A}_X(Y)$ zdanie: gra $G_X(Y)$ jest zdeterminowana. Analogicznie rozumiemy $\mathcal{A}^*_X(Y)$ oraz $\mathcal{A}^{**}_X(Y)$. Natomiast napisy $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{A}^*_X$, $\mathcal{A}^{**}_X$ oznaczają: dla każdego

[4]informacje na temat prac zawierających dowody można znaleźć w [15], str. 237

podzbioru $Y \subseteq X^\omega$, odpowiednio $\mathcal{A}_X(Y)$, $\mathcal{A}^*_X(Y)$, $\mathcal{A}^{**}_X(Y)$ (przy takich oznaczeniach mamy: AD oznacza $\mathcal{A}_2$).

Okazuje się, że gra $G^{**}_X(Y)$ jest ściśle związana z grą Banacha-Mazura na przedziale jednostkowym. Określamy funkcję

$$\phi : 2^\omega \longrightarrow [0,1]$$

wzorem

$$\phi(\langle x_0, x_1, \ldots\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}.$$

Wówczas mamy

Twierdzenie 1. *Dla każdego $Y \subseteq 2^\omega$ zachodzi: gra $G^{**}_2(Y)$ jest wygrana dla (I) ((II)) wtedy i tylko wtedy, gdy gra $\langle [0,1], \phi(Y)\rangle$ jest wygrana dla (I) ((II)).*

Dowód.

Udowodnimy twierdzenie w przypadku gracza (I) (w przypadku gracza (II) dowód jest analogiczny). Na wstępie zauważmy, że możemy rozważać uogólnioną grę Banacha-Mazura, w której gracze wybierają przedziały z rodziny $\mathcal{G} = \{I(s) \subseteq [0,1] : s \in 2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$, gdzie $I(s)$ ($s = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$) oznacza przedział o lewym końcu $0.x_0x_1\ldots x_n$ w rozwinięciu dwójkowym i o długości 2^{-n}. Wynika to z twierdzeń Tw.5 i Tw.6 z paragrafu 1.

($\Rightarrow$)

Załóżmy, że gra $G^{**}_2(Y)$ jest wygrana dla (I), tzn. (I) ma zwycięską strategię. Rozpatrzmy teraz grę $\langle [0,1], \phi(Y), \mathcal{G}\rangle$. Niech gracz (I) rozpoczyna od wyboru przedziału $I(s_0)$, gdzie s_0 jest skończonym ciągiem 0 i 1 wybranym w początkowym ruchu gracza (I) w grze

$G_2^{**}(Y)$. Jeśli teraz gracze określili już przedziały $I(s_0), I(s_0 * s_1), \ldots, I(s_0 * \ldots * s_{2k+1})$ to gracz (I) w swoim kolejnym ruchu wybiera przedział $I(s_0 * \ldots * s_{2k+1} * s_{2k+2})$, gdzie s_{2k+2} jest wyborem zgodnym ze zwycięską strategią gracza (I) w grze $G_2^{**}(Y)$ następującym po ruchach $s_0, s_1, \ldots, s_{2k+1}$. W ten sposób określiliśmy strategię gracza (I) w grze $\langle [0,1], \phi(Y), \mathcal{G} \rangle$. Uzasadnimy, że zapewnia ona wygraną gracza (I). Niech $\langle x_0, x_1, \ldots \rangle = s_0 * \ldots * s_{2k+1} * s_{2k+2} * \ldots$ $(s_0, \ldots, s_{2k+1}, s_{2k+2}, \ldots$ jest wynikiem gry zgodnym z wyżej określoną strategią). Wiadomo, że $\langle x_0, x_1, \ldots \rangle \in Y$. Ponieważ $\bigcap_l I(s_0 * \ldots * s_l) = \{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x_l}{2^{l+1}}\}$, więc $\bigcap_l I(s_0 * \ldots * s_l) \cap \phi(Y) \neq \emptyset$, co kończy dowód implikacji $(\Rightarrow)$.
$(\Leftarrow)$

Określimy zwycięską strategię dla gracza (I) w grze $G_2^{**}(Y)$ (przy założeniu, że taka istnieje w grze $\langle [0,1], \phi(Y), \mathcal{G} \rangle$). Możemy przyjąć, że zbiór Y nie zawiera ciągów, które są od pewnego miejsca stałe. Takich ciągów jest przeliczalna ilość, a zbiór przeliczalny nie wpływa na zdeterminowanie zbioru w grze $\langle [0,1], \phi(Y), \mathcal{G} \rangle$ (tzn. zbiór zdeterminowany dla (I) ((II)) powiększony lub pomniejszony o przeliczalną ilość elementów pozostaje zdeterminowany dla (I) ((II))) (Tw.5, Tw.6).

Na początku gracz (I) wybiera $s_0 \in 2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ taki, że przedział $I(s_0)$ jest przedziałem wybranym w pierwszym ruchu gracza (I) w grze $\langle [0,1], \phi(Y), \mathcal{G} \rangle$ zgodnym z wygrywającą strategią. Załóżmy, że gracze określili $s_0, s_1, \ldots, s_{2k+1}$. Wtedy gracz (I) wybiera taki ciąg s_{2k+2}, że przedział $I(s_0 * \ldots * s_{2k+2})$ jest przyporządkowany ciągowi przedziałów $I(s_0), I(s_0 * s_1), \ldots, I(s_0 * \ldots * s_{2k+1})$ przez wygrywającą strategię w grze $\langle [0,1], \phi(Y), \mathcal{G} \rangle$. Jeśli teraz $s_0, s_1, \ldots$ jest wynikiem gry $G_X^{**}(Y)$

zgodnym z wyżej opisaną strategią, to mamy

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x_l}{2^{l+1}} \in \phi(Y).$$

A to znaczy, że

$$\langle x_0, x_1, \ldots \rangle = s_0 * s_1 * \ldots \in Y,$$

gdyż $\phi^{-1}(\phi(Y)) = Y$. ∎

Z powyższego twierdzenia wynika następujący

Wniosek. *Zdanie $\mathcal{A}_X^{**}$ jest równoważne zdaniu, że dla każdego zbioru $A \subseteq [0,1]$ gra $\langle [0,1], A \rangle$ jest zdeterminowana.*

Dowód.

Implikacja w prawą stronę wynika łatwo z własności

$$\phi(\phi^{-1}(A)) = A.$$

(każdy zbiór $A \subseteq [0,1]$ jest obrazem zbioru $\phi^{-1}(A)$ przy odwzorowaniu ϕ)

Implikacja w przeciwną stronę jest oczywista. ∎

W §1 (str. 9) pokazaliśmy, że przy założeniu AC istnieje zbiór niezdeterminowany w grze Banacha-Mazura. Wobec tego powyższy wniosek implikuje, że przy założeniu AC istnieje taki zbiór Y, że gra $G_2^{**}(Y)$ jest niezdeterminowana.

Zachodzą (w ZF) następujące zależności:

$$(1) \qquad \mathcal{A}_n \iff \mathcal{A}_\omega \Longrightarrow \mathcal{A}_\omega^* \Longrightarrow \mathcal{A}_\omega^{**} \iff \mathcal{A}_n^{**}, \quad \mathcal{A}_\omega^* \Longrightarrow \mathcal{A}_n^*.$$

(widać stąd, że aksjomat detrminacji AD jest równoważny każdemu ze zdań $\mathcal{A}_n$ dla $n \leq \omega$) Implikacje $\mathcal{A}_\omega \Longrightarrow \mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_\omega^{**} \Longrightarrow \mathcal{A}_n^{**}$ oraz $\mathcal{A}_\omega^* \Longrightarrow \mathcal{A}_n^*$ wynikają z następującego ogólnego twierdzenia prawdziwego w ZF (które podajemy bez dowodu):

Twierdzenie 2[5]**.** *Jeśli* $\overline{\overline{X}}_1 \geq 2$, X_2 *jest dobrze uporządkowany oraz istnieje funkcja z* X_2 *na* X_1, *to* $\mathcal{A}_{X_2} \Longrightarrow \mathcal{A}_{X_1}$, $\mathcal{A}^{**}_{X_2} \Longrightarrow \mathcal{A}^{**}_{X_1}$ *i* $\mathcal{A}^{*}_{X_2} \Longrightarrow \mathcal{A}^{*}_{X_1}$.

Udowodnimy teraz niektóre z pozostałych implikacji.

Dowód $\mathcal{A}_n \Longrightarrow \mathcal{A}_\omega$**.**

Zauważmy, że wobec Twierdzenia 2 wystarczy pokazać, że $\mathcal{A}_2 \Longrightarrow \mathcal{A}_\omega$. Niech $Y_1 \subseteq \omega^\omega$. skonstrułjuemy zbiór $Y_2 \subseteq 2^\omega$ taki, że $\mathcal{A}_2(Y_2) \Longrightarrow \mathcal{A}_\omega(Y_1)$. Niech $\Omega \subseteq 2^\omega$ będzie zbiorem ciągów, w których 0 występuje nieskończenie wiele razy na parzystych oraz nieparzystych miejscach. Zdefiniujmy

$$f_i, g : \Omega \longrightarrow \omega \text{ dla } i \in \omega$$

następująco:

$$g(s) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n : s_{2n} = 0\},$$

$$f_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} g(s),$$

$$f_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} g(s^{2f_{i-1}(s)+1}) \text{ dla } i \geq 1,$$

przy czym dla $s = \langle s_0, s_1, \ldots \rangle$ przez s^n oznaczamy ciąg $\langle s_n, s_{n+1}, \ldots \rangle$ ($f_0(s)$ określa ilość kolejnych 1 na początkowych parzystych miejscach, $f_1(s)$ ilość kolejnych 1 występujących na nieparzystych miejscach po pierwszym 0 na miejscu parzystym, $f_2(s)$ ilość kolejnych 1 na parzystych miejscach po pierwszym 0 na nieparzystym miejscu, które wystąpiło po pierwszym 0 na miejscu parzystym, itd.)

Niech teraz

$$f : \Omega \longrightarrow \omega^\omega \text{ i } f = \langle f_0, f_1, \ldots \rangle.$$

Zbiór Y_2 określamy jako sumę zbiorów

[5] patrz [1], §1 str. 22

$$f^{-1}(Y_1) \text{ oraz } \{s \in 2^\omega : \exists_n^\infty s_{2n} = 0 \wedge \neg \exists_n^\infty s_{2k+1} = 0\}.$$

Z założenia mamy, że gra $G_2(Y_2)$ jest zdeterminowana. Niech zwycięską strategię posiada (I). Określimy zwycięską strategię dla (I) w grze $G_\omega(Y_1)$. Niech liczby $n_1, n_3, \ldots \in \omega$ będą wyborami (II), których dokona w grze $G_\omega(Y_1)$ (oczywiście nieznanymi przez (I)). Niech dalej $s \in 2^\omega$ będzie takim wynikiem gry $G_2(Y_2)$ zgodnym ze zwycięską strategią (I), że (II) wybierał 0 do momentu wybrania pierwszego 0 przez (I), następnie w kolejnych $n_1 + 1$ ruchach wybierał n_1 razy 1 i potem jeden raz 0, dalej wybierał znowu 0 do momentu, w którym (I) ponownie wybrał 0, itd. (nie może się zdarzyć, że od pewnego miejsca (I) będzie wybierał tylko 1 - wynika to z określenia Y_2). Jeśli teraz w grze $G_\omega(Y_1)$ gracz (I) będzie kolejno wybierał $f_0(s), f_2(s), \ldots$, to

$$\langle f_0(s), n_1, f_2(s), n_2 \ldots \rangle \in Y_1,$$

gdyż $\langle f_0(s), n_1, f_2(s), n_2 \ldots \rangle = f(s)$. To kończy dowód w przypadku istnienia strategii zwycięskiej dla (I) w grze $G_2(Y_2)$. W drugim przypadku ((II) ma strategię wygrywającą) dowód przbiega podobnie. ∎

Dowód $\mathcal{A}_\omega \Longrightarrow \mathcal{A}_\omega^*$.

Niech $P_1 \subseteq \omega^\omega$. Podobnie jak wyżej, skonstrułujemy $P_2 \subseteq \omega^\omega$ taki, że $\mathcal{A}_\omega(P_2) \Longrightarrow \mathcal{A}_\omega^*(P_1)$. Ustawmy wszystkie skończone ciągi liczb naturalnych (w tym również ciąg pusty) w ciąg $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$. Definiujemy

$$h : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega,$$

$$h(\langle n_0, n_1, n_2, \ldots \rangle) \stackrel{\text{def}}{=} a_{n_0} * \langle n_1 \rangle * a_{n_2} * \langle n_3 \rangle * \ldots \ .$$

Niech $P_2 \overset{\text{def}}{=} h^{-1}(P_1)$. Rozważmy przypadek, gdy gra $G_\omega(P_2)$ jest zdeterminowana dla (II). Niech f będzie zwycięską strategią. Określimy zwycięską strategię (II) f_1 w grze $G^*_\omega(P_1)$.

$$f_1(\langle a_{n_0}, n_1, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{2k}} \rangle) \overset{\text{def}}{=} f(\langle n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{2k} \rangle) \quad \text{dla } \ k \in \omega.$$

Jeśli teraz ciąg $\langle a_{n_0}, n_1, a_{n_2}, \ldots \rangle$ jest zgodny z f_1, to ciąg $\langle n_0, n_1, n_2, \ldots \rangle$ jest zgodny z f. Czyli $\langle n_0, n_1, n_2, \ldots \rangle \in P_2$, a to znaczy, że $\langle a_{n_0}, n_1, a_{n_2}, \ldots \rangle \in P_1$.

W przypadku, gdy (I) ma wygrywającą strategię w grze $G_\omega(P_2)$ dowód jest analogiczny. ∎

Dowody pozostałych implikacji ($\mathcal{A}^*_\omega \implies \mathcal{A}^{**}_\omega$, $\mathcal{A}^{**}_n \implies \mathcal{A}^{**}_\omega$) są bardzo podobne i nie będziemy ich zamieszczać (można je znaleźć w [9], str. 215)

Teraz możemy powrócić do problemu niesprzeczności i niezależności AD od pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Ponieważ, jak zauważyliśmy wcześniej, przy założeniu AC można skonstruować zbiór Y taki, że gra $G_2(Y)$ jest niezdeterminowana, więc AD i AC są sprzeczne na gruncie ZF. Dalej, ponieważ AC jest niesprzeczny z ZF, więc $\neg$AD jest też niesprzeczny z ZF. Problem niesprzeczności AD z ZF jest znacznie trudniejszy. Do tej pory nie został on całkowicie rozwiązany. Uzyskano wyniki, które wiążą problem niesprzeczności AD z problemem niesprzeczności innych aksjomatów dotyczących głównie istnienia dużych liczb kardynalnych. Jednym z rezultatów związanych z problemem niesprzeczności AD jest wynik Solovaya, który udowodnił, że niesprzeczność teorii ZF + AD implikuje niesprzeczność teorii ZF + AC + "istnieją nieprzeliczalne liczby kardynalne mierzalne".

Mimo, że AD i AC są sprzeczne na gruncie ZF, to okazuje się, że słabsza forma AC (WAC) wynika z AD, natomiast AC w pełnej formie jest równoważny pewnej zmodyfikowanej wersji aksjomatu determinacji.

Niech $Y \subseteq X^2$. Oznaczmy przez $G^1_X(Y)$ grę, w której gracze wykonują po jednym ruchu. Jeśli określony przez graczy ciąg należy do Y, to wygrywa (I), w przeciwnym przypadku wygrywa (II). Napis $\mathcal{A}^1_X$ oznacza, że dla każdego $Y \subseteq X^2$ gra $G^1_X(Y)$ jest zdeterminowana.

Twierdzenie 3 [6]**.** *AC jest równoważne zdaniu* $\forall_X \mathcal{A}^1_X$.

Dowód.

($\Rightarrow$)

Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem a Y dowolnym podzbiorem zawartym w X^2. Pokażemy, że gra $G^1_X(Y)$ jest zdeterminowana. Z praw de Morgana wiadomo, że zachodzi jeden z przypadków: $\forall_{x_0 \in X} \exists_{x_1 \in X} (x_0, x_1) \notin Y$ lub $\exists_{x_0 \in X} \forall_{x_1 \in X} (x_0, x_1) \in Y$. Jeśli zachodzi pierwszy z nich, to funkcja wyboru rodziny $\{F_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ (gdzie $F_{x_0} = \{x_1 : (x_0, x_1) \notin Y\}$) wyznacza zwycięską strategię gracza (II). Jeśli natomiast zachodzi druga z możliwości, to dzięki AC gracz (I) może wybrać takie $x_0 \in X$, że $\forall_{x_1 \in X} \ (x_0, x_1) \in Y$.

($\Leftarrow$)

Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną, niepustą rodziną zbiorów, która nie zawiera zbioru pustego. Rozważmy zbiór $X \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F} \times (\bigcup \mathcal{F} \cup \{\emptyset\})$. Przez Y oznaczamy zbiór

$$\{\langle (S_0, t_0), (S_1, t_1) \rangle : t_1 \notin S_0\} \subseteq X^2.$$

[6] patrz [9], str. 216

Na mocy założenia gra $G^1_X(Y)$ jest zdeterminowana. Oczywiście zwycięską strategię posiada gracz (II) (w przeciwnym przypadku istniał by taki zbiór $S_0 \in \mathcal{F}$, że $S_0 \cap \bigcup \mathcal{F} = \emptyset$). Niech g będzie strategią wygrywającą gracza (II). Wówczas funkcją wyboru dla rodziny F jest funkcja f określona następująco:

$$f(S) \stackrel{\text{def}}{=} t_1 \text{ , gdzie } (S_1, t_1) = g(S, \emptyset).$$

■

Twierdzenie 4 [7]**.** *AD implikuje WAC.*

Dowód.

Niech $\mathcal{X} = \langle X_0, X_1, \ldots \rangle$ będzie ciągiem niepustych zbiorów takim, że $\overline{\overline{\bigcup \mathcal{X}}} \leq 2^{\aleph_0}$. Możemy przyjąć, że $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \omega^\omega$. Definiujemy

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle n_0, n_1 \ldots \rangle \in \omega^\omega : \langle n_1, n_3 \ldots \rangle \notin X_{n_0}\}.$$

Gra $G_\omega(Y)$ jest zdeterminowana. Oczywiście gracz (I) nie może posiadać zwycięskiej strategii, gdyż zbiory $X_0, X_1, \ldots$ są niepuste. A więc gra $G_\omega(Y)$ jest wygrana dla (II). Zwycięska strategia g tego gracza określa funkcję wyboru dla rodziny $\mathcal{X}$. Rzeczywiście. Definiujemy $f : \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup \mathcal{X}$ następująco:

$$f(X_n) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_i \rangle_{i \in \omega},$$

gdzie ciąg $\langle x_i \rangle_{i \in \omega}$ taki, że

$$x_0 = g(n),$$

$$x_{i+1} = g(n, x_0, 0, x_1, 0, \ldots, x_i, 0) \quad (i \in \omega).$$

[7] patrz [9], str. 217

Z określenia $\langle x_i \rangle_{i\in\omega}$ widać, że $f(X_n) \in X_n$. $\blacksquare$

Z ostatniego twierdzenia wynika, że w teorii ZF+AD można udowodnić dużo twierdzeń, które wymagają użycia słabszej wersji pewnika wyboru. Mianowicie WAC wystarcza do udowodnienia σ-addytywności miary Lebesgue'a oraz rodziny zbiorów I-kategorii, równoważności dwóch definicji ciągłości funkcji: Cauchego i Heinego, a także regularności liczby ω_1.

Udowodnimy, że WAC implikuje regularność ω_1 (patrz [1], §1 str.19). Dla dowodu tego faktu skonsrułujemy rozbicie zbioru $\mathcal{P}(\omega)$ na ω_1 rozłącznych zbiorów (tzw. rozbicie Lebesgue'a).

Niech funkcja $h : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ będzie określona wzorem

$$h(m,n) \stackrel{\text{def}}{=} 2^n(2m+1) - 1.$$

Jest to funkcja różnowartościowa i na. Definiujemy

$$L_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{P}(\omega) : A = \emptyset \lor \langle \omega, h^{-1}(A) \rangle \text{ nie jest dobrym porządkiem}\},$$

$$L_n \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{P}(\omega) : \overline{\overline{A}} = n\} \ \ (0 < n < \omega),$$

$$L_\xi \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{P}(\omega) : \langle \omega, h^{-1}(A) \rangle \text{ jest dobrym porządkiem typu } \xi\}$$

dla $(\omega \leq \xi \leq \omega_1)$.

Uzasadnimy, że każdy z wyżej zdefiniowanych zbiorów jest niepusty. Jest to oczywiste dla zbiorów L_n $(n < \omega)$. Niech $\omega \leq \xi \leq \omega_1$. Ponieważ ξ jest liczbą porządkową przeliczalną więc istnieje funkcja równoliczności z ξ na ω. Funkcja ta wyznacza na ω relację dobrego porządku R taką, że $\langle \omega, R \rangle$ jest typu porządkowego ξ. Wówczas $h(R) \in L_\xi$. Oczywiste jest, że zbiory L_ξ $(\xi < \omega_1)$ są parami rozłączne i dowolny podzbiór ω należy do któregoś z nich. Funkcję f z $\mathcal{P}(\omega)$

na ω_1 określamy następująco: $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \xi$, gdy $A \in L_\xi$. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że w teorii ZF+AD nie można skonstrułować funkcji różnowartościowej z ω_1 w $\mathcal{P}(\omega)$, tzn. liczby kardynalne $\aleph_1$ i $2^{\aleph_0}$ są nieporównywalne.

Niech teraz $\langle \xi_n \rangle_{n \in \omega}$ będzie dowolnym ciągiem liczb porządkowych takich, że $\omega \leq \xi_n < \omega_1$ $(n \in \omega)$. Z WAC wynika istnienie ciągu $\langle A_n \rangle_{n \in \omega}$, gdzie $A_n \in L_{\xi_n}$. Z określenia tego ciągu widać $f(A_n) = \xi_n$. Zdefiniujemy teraz relację dobrego porządku R na $\omega \times \omega$.

$$(n_1, m_1) R (n_2, m_2) \equiv (n_1 < n_2 \vee (n_1 = n_2 \wedge m_1 R_{n_1} m_2)),$$

$$\text{gdzie } R_{n_1} = h^{-1}(A_{n_1}).$$

$\langle \omega \times \omega, R \rangle$ jest przeliczalnym porządkiem, jego typ oznaczmy przez β. Widać, że β jest ograniczeniem górnym ciągu $\langle \xi_n \rangle_{n \in \omega}$.

Na zakończenie tego paragrafu przedstawimy niektóre konsekwencje AD. Otóż w teorii ZF+AD można udowodnić następujące fakty:

(a) Każdy zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

(b) Każdy zbiór liczb rzeczywistych ma własność Baire'a.

(c) Liczba porządkowa ω_1 jest mierzalna (tzn. istnieje nietrywialna miara określona na $\mathrm{P}(\omega_1)$, przyjmująca wartości 0 i 1 oraz znikająca na punktach).

(d) Liczba ω_1 spełnia następującą relację podziałową $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^\omega$ (tzn. dla każdego rozbicia $F : [\omega_1]^\omega \longrightarrow 2$ istnieje podzbiór $C \subseteq \omega_1$ równoliczny z ω_1 jednorodny względem F, tzn. obraz $F([C]^\omega)$ jest jednoelementowy).

(e) Nie istnieje liczba kardynalna γ taka, że $\aleph_0 < \gamma < 2^{\aleph_0}$, tzn. każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest przeliczalny albo jest równoliczny z całym zbiorem $\mathbf{R}$.

Fakt (b) wynika z Twierdzenia 4 w §1 oraz z wniosku w tym paragrafie. Dowód konsekwencji (a) przedstawimy w dalszej części, natomiast pozostałe pozostawimy bez dowodu ((c) i (d) patrz [4], Tw.2.5 i Tw.2.6; (e) patrz [9], str.209).

3.3 **Dowód mierzalności wszystkich zbiorów na prostej.**

Udowodnimy twierdzenie o mierzalności w sensie Lebesgue'a wszystkich zbiorów na prostej, przy założeniu AD. Ale przed przystąpieniem do dowodu podamy potrzebne pojęcia oraz twierdzenia.

Definicja . *Podzbiór* $\mathbf{R}$ *nazywamy zbiorem analitycznym, jeśli jest on ciągłym obrazem przestrzeni Baire'a* ω^ω.

Twierdzenie 1[8]**.** *Każdy podzbiór borelowski przestrzeni Baire'a* ω^ω *jest ciągłym obrazem tej przestrzeni.*

Z powyższego twierdzenia wynika

Wniosek 1. *Jeśli* B *jest podzbiorem borelowskim przestrzeni Baire'a* ω^ω *oraz funkcja* $f : \omega^\omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *jest ciągła, to zbiór* $f(B) \subseteq \mathbf{R}$ *jest zbiorem analitycznym.*

Twierdzenie 2 (Łuzin,Sierpiński)[9]**.** *Każdy zbiór analityczny jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.*

Ustawmy na wstępie wszystkie skończone sumy przedziałów o końcach wymiernych zawartych w przedziale [0,1] w ciąg $\langle S_n \rangle_{n\in\omega}$. W dalszej części tego paragrafu będziemy się odwoływać do tego uporządkowania.

---

[8]patrz [3], część IV roz.2 §3
[9]patrz [3], część IV roz.3 §2

Lemat. *Dla dowolnego zbioru liniowego M miary Lebesgue'a zero i dowolnego szeregu zbieżnego liczb dodatnich $\sum \varepsilon_i$ istnieje pokrycie $\langle S_{n_i}\rangle_{i\in\omega}$ zbioru M o własności*

$$\forall_i \;\; m(S_{n_i}) \leq \varepsilon_i.$$

Dowód.

Wystarczy udowodnić tezę dla szeregów o wyrazach wymiernych. Niech $\varepsilon := \sum_i \varepsilon_i$. Istnieje ciąg przedziałów $\langle I_i\rangle_{i\in\omega}$ pokrywający M taki, że $\sum_i |I_i| \leq \varepsilon$. Możemy przyjąć, że przedziały I_i mają końce wymierne (wystarczy wybrać ciąg przedziałów dla $\frac{\varepsilon}{2}$ i następnie odpowiednio powiększyć przedziały o końcach niewymiernych) oraz suma ich długości wynosi dokładnie ε. Skonstrułujemy teraz żądane pokrycie.

Niech k_0 taka liczba naturalna, że $\sum_{i=0}^{k_0-1} |I_i| \leq \varepsilon_0$ i $\sum_{i=0}^{k_0} |I_i| > \varepsilon_0$ ($\sum_{i=0}^{-1} |I_i| = 0$). Wówczas przedział I_{k_0} dzielimy na dwa podprzedziały I_{0,k_0}, I_{1,k_0} w taki sposób, że $\sum_{i=0}^{k_0-1} |I_i|+|I_{0,k_0}| = \varepsilon_0$ (I_{0,k_0}, I_{1,k_0} mają końce wymierne, gdyż ε_0 jest liczbą wymierną). Przyjmujemy n_0 takie, że

$$S_{n_0} = (\bigcup_{i=0}^{k_0-1} I_i) \cup I_{0,k_0}.$$

Przedziały $I_{1,k_0}, I_{k_0+1}, I_{k_0+2}, \ldots$ oznaczamy odpowiednio $I_0^{(0)}, I_1^{(0)}, I_2^{(0)}$, ...

Przypuśćmy, że skonstrułowaliśmy w ten sposób $S_{n_0}, S_{n_1}, \ldots, S_{n_l}$. Niech $k_{l+1} \in \omega$ takie, że $\sum_{i=0}^{k_{l+1}-1} |I_i^{(l)}| \leq \varepsilon_{l+1}$ i $\sum_{i=0}^{k_{l+1}} |I_i^{(l)}| > \varepsilon_{l+1}$. Przedział $I_{k_{l+1}}$ dzielimy na dwa podprzedziały $I_{0,k_{l+1}}^{(l)}, I_{1,k_{l+1}}^{(l)}$ tak, by $\sum_{i=0}^{k_{l+1}-1} |I_i^{(l)}| + |I_{0,k_{l+1}}^{(l)}| = \varepsilon_{l+1}$. Niech n_{l+1} takie, że

$$S_{n_{l+1}} = (\bigcup_{i=0}^{k_{l+1}-1} I_i^{(l)}) \cup I_{0,k_{l+1}}^{(l)}.$$

Przedziały $I_{1,k_{l+1}}^{(l)}$, $I_{k_{l+1}+1}^{(l)}$, $I_{k_{l+1}+2}^{(l)}, \ldots$ oznaczamy odpowiednio $I_0^{(l+1)}$, $I_1^{(l+1)}$, $I_2^{(l+1)}, \ldots$.

Na mocy zasady indukcji określiliśmy ciąg $\langle S_{n_i} \rangle_{i\in\omega}$. Ze sposobu konstrukcji widać, że spełnia on własności

$$\bigcup S_{n_i} = \bigcup I_i, \quad \forall_i \ m(S_{n_i}) \leq \sum_{i=0}^{k_i-1} |I_i^{(i-1)}| + |I_{0,k_i}^{(i-1)}| = \varepsilon_i,$$

czyli jest szukanym pokryciem. ∎

Twierdzenie 3 (Mycielski, Świerczkowski) [10]**.** *Załóżmy, że zachodzi AD. Wówczas każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.*

Dowód.

Oczywiście wystarczy udowododnić, że każdy podzbiór odcinka [0,1] jest mierzalny. Niech $E \subseteq [0,1]$ będzie dowolnym zbiorem. Pokażemy, że $m_*(E) = m^*(E)$. Z własności miary wewnętrznej wiemy, że istnieje $E_1 \subseteq E$ typu F_σ o mierze równej $m_*(E)$. Więc zbiór $E \setminus E_1$ ma miarę wewnętrzną równą zero. Czyli wystarczy pokazać, że $m^*(E \setminus E_1) = 0$.

Oznaczmy $E \setminus E_1$ przez E^*. Niech $\varepsilon > 0$ dowolne ustalone. skonstrułujemy pokrycie zbioru E^* zbiorami z ciągu $\langle S_n \rangle_{n\in\omega}$, których suma miar jest mniejsza od ε.

Zdefiniujemy teraz ciąg liczbowy $\langle a_n \rangle$ oraz zbiór $A \subseteq \omega^\omega$.

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon}{10^{2i+1}} \quad (i \in \omega);$$

$$\langle n_0, n_1, n_2, \ldots \rangle \in A \text{ wtedy i tylko wtedy,}$$

[10]podajemy dowód według L.Harringtona, patrz [4] roz.II

gdy zachodzi przynajmniej jeden z poniższych warunków:

(1) $$m(S_{n_{2i+1}}) \geq a_i \quad \text{dla pewnego } i,$$

(2) liczba $r = 0, n_0 n_2 n_4 n_6 \ldots$ (w rozwinięciu dziesiętnym) należy do E^*, natomiast nie należy do żadnego ze zbiorów $S_{n_1}, S_{n_3}, S_{n_5}, \ldots$.

Ponieważ zakładamy AD, więc gra $G_\omega(A)$ jest zdeterminowana (patrz warunek (1) w 3.2). Pokażemy, że ta gra jest zdeterminowana dla (II).

Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech f będzie zwycięską strategią gracza (I). Określimy odworowanie $\tilde{f}$ z przestrzeni ω^ω w odcinek [0,1]. Niech $\langle n_1, n_3, n_5, \ldots \rangle \in \omega^\omega$. Określamy

$$n_0 = f(\emptyset),\ n_2 = f(n_0, n_1), \ldots,\ n_{2k} = f(n_0, n_1, \ldots, n_{2k-1}).$$

Wówczas

$$\tilde{f}(\langle n_1, n_3, n_5, \ldots \rangle) \overset{\text{def}}{=} 0, n_0 n_2 n_4 \ldots.$$

Funkcja $\tilde{f}$ jest oczywiście ciągła. Określimy teraz zbiór $P \subseteq \omega^\omega$.

$$P \overset{\text{def}}{=} \{\langle n_1, n_3, n_5, \ldots \rangle : m(S_{n_{2i+1}}) < a_i \ (i \in \omega)\}.$$

Zbiór P jest domknięty. Rzeczywiście, jeśli $\langle n_1^k, n_3^k, n_5^k, \ldots \rangle \to \langle n_1, n_3, n_5, \ldots \rangle$ (gdzie $\langle n_1^k, n_3^k, n_5^k, \ldots \rangle \in P$), to

$$\forall_i\ \exists_{k_i}\ n_1 = n_1^{k_i}, n_3 = n_3^{k_i}, \ldots, n_{2i+1} = n_{2i+1}^{k_i}.$$

A stąd wynika, że

$$\forall_i\ m(S_{n_{2i+1}}) < a_i.$$

Oznaczmy przez P^* obraz P przy odwzorowaniu $\tilde{f}$. Ponieważ funkcja $\tilde{f}$ jest ciągła, więc P^* jest zbiorem analitycznym (Wniosek 1), a zatem mierzalnym (Tw.2).

Pokażemy, że $P^* \subseteq E^*$. Jeśli $x \in P^*$, to $x = \tilde{f}(\langle n_1, n_3, n_5, \ldots\rangle)$. Ponieważ f jest zwycięską strategią dla (I), więc $\langle n_0, n_1, n_2, \ldots\rangle \in A$. Ale ciąg $\langle n_0, n_1, n_2, \ldots\rangle$ nie spełnia własności (1) (bo jest elementem P), więc musi spełniać (2). A z tego wynika, że $x \in E^*$.

Ponieważ $m_*(E^*) = 0$, więc $m(P^*) = 0$. Niech $S_{n_1}, S_{n_3}, S_{n_5}, \ldots$ będzie pokryciem zbioru P^*, które nie spełnia własności (1), tzn. $\langle n_1, n_3, n_5, \ldots\rangle \in P$ (takie istnieje z Lematu). Oczywiście $x = \tilde{f}(\langle n_1, n_3, n_5, \ldots\rangle) \in P^*$. A stąd wynika, że $x \in S_{n_{2k+1}}$ dla pewnego k. Wobec tego ciąg

$$\langle f(\emptyset),\ n_1,\ f(f(\emptyset), n_1),\ n_3,\ f(f(\emptyset), n_1, f(f(\emptyset), n_1), n_5),\ n_5, \ldots\rangle$$

nie spełnia żadnego z warunków (1) i (2), czyli nie należy do A. Otrzymaliśmy sprzeczność z tym, że f jest zwycięską strategią gracza (I).

Zatem $G_\omega(A)$ jest wygrana dla (II). Niech g będzie wygrywającą strategią dla (II). Zdefiniujmy następujące zbiory

$N = \{0, 1, \ldots, 9\}$,

$N_1 = \{g(n_0) : n_0 \in N\}$,

$N_3 = \{g(n_0, n_1, n_2) : n_0, n_2 \in N, \quad n_1 = g(n_0)\}$,

$$\vdots$$

$$N_{2k+1} = \{g(n_0, \ldots, n_{2k}) : n_{2i} \in N,\ n_{2i+1} = g(n_0, \ldots, n_{2i}),\ i \leq k-1\},$$

(N_{2k+1} - zbiór wszystkich możliwych wyborów gracza (II) w k-tym ruchu zgodnych z g, przy założeniu, że wcześniejsze jego wybory były zgodne z g, a (I) wybierał dowolne liczby ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$).

Każdy ze zbiorów N_{2k+1} ma niewięcej niż 10^k elementów oraz $m(S_i) < a_k$ dla $i \in N_{2k+1}$. Oznaczmy zbiór $\cup_i N_{2i+1}$ przez V, zaś $\cup_{l \in V} S_l$ przez W. Zbiór W zawiera E^*. Rzeczywiście. Niech $x \in E^*$

i $0,n_0n_2n_4\ldots$ będzie dziesiętnym rozwinięciem x takim, że $n_{2i} \in \{0,1,\ldots,9\}$. Wtedy

$$\langle n_0, n_1, n_2, \ldots\rangle \notin A, \quad \text{gdzie } n_1 = g(n_0),\ n_3 = g(n_0,n_1,n_2), \ldots.$$

Z definicji zbioru A oraz z tego, że $x \in E^*$ widać, że $x \in S_{n_{2k+1}}$ dla pewnego k. Ale $n_{2k+1} \in N_{2k+1} \subseteq V$, więc $x \in W$.

Dalej otrzymujemy

$$m(W) \leq \sum_{l\in V} m(S_l) \leq \sum_k \sum_{i\in N_{2k+1}} m(S_i) \leq \sum_k 10^k a_k \leq \varepsilon \sum_k \frac{10^k}{10^{2k+1}} < \varepsilon.$$

Zatem pokazaliśmy, że istnieje pokrycie zbioru E^* elementami ciągu $\langle S_n\rangle_{n\in\omega}$, których suma miar jest mniejsza od ε, co wobec dowolności ε oznacza, że $m(E^*) = 0$. ∎

Twierdzenie 4 można uogólnić na dowolną przestrzeń metryczną ośrodkową. Otóż zachodzi (w ZF + AD)

Wniosek 2 [11]**.** *Niech E będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, a μ σ-addytywną, skończoną miarą borelowską na E. Wówczas każdy podzbiór $X \subseteq E$ jest μ-mierzalny, tzn.*

$$\exists_{B_1,B_2\in\mathcal{B}(E)}\ B_1 \subseteq X \subseteq B_2 \ \textit{i}\ \mu(B_1) = \mu(B_2).$$

Przed dowodem wniosku przytoczymy twierdzenie o izomorfizmie miar.

Definicja. *Zbiór $X \in \mathcal{B}(Z)$, gdzie Z jest przestrzenią metryczną ośrodkową i zupełną, nazywamy absolutnie borelowskim (oznaczamy $X \in \mathcal{B}$).*

[11] patrz [11]

Definicja. *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie bijekcją (X, Y przestrzenie metryczne). Odwzorowanie f nazywamy homeomorfizmem uogólnionym, gdy zarówno obraz jak i przeciwobraz dowolnego zbioru borelowskiego jest zbiorem borelowskim.*

Twierdzenie 4 [12]**.** *Dla każdych dwóch skończonych, borelowskich miar ciągłych, μ na przestrzeni $X \in \mathcal{B}$ oraz ν na przestrzeni $Y \in \mathcal{B}$ takich, że $\mu(X) = \nu(Y) > 0$, istnieje homeomorfizm uogólniony $\phi : X \longrightarrow Y$ zachowujący miarę, tzn. $\mu(E) = \nu(\phi(E))$ dla każdego zbioru borelowskiego $E \subseteq X$.*

Dowód Wniosku 2.

Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że μ jest unormowana i bezatomowa (bo μ jest skończona). Wiadomo (patrz np. [5], roz.XIV §4), że każda przestrzeń metryczna ośrodkowa jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem kostki Hilberta $\mathcal{H}$ (fakt ten wymaga użycia tylko słabej formy aksjomatu wyboru tzn. WAC). Niech

$$h : E \longrightarrow \mathcal{H}$$

będzie homeomorfizmem w kostkę Hilberta. Określimy teraz miarę na podzbiorach borelowskich $\mathcal{H}$. Niech

$$\nu(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(h^{-1}(Y)) \text{ dla każdego } \quad Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Widać, że ν jest skończoną bezatomową miarą borelowską na $\mathcal{H}$. A to znaczy (wobec twierdzenia o izomorfizmie miar), że istnieje homeomorfizm uogólniony

$$\phi : \langle \mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}), \nu \rangle \longrightarrow \langle [0,1], \mathcal{B}([0,1]), m \rangle,$$

[12] patrz [7], część 4.1

zachowujący miarę. Wobec mierzalności wszystkich podzbiorów $[0,1]$ mamy, że każdy podzbiór $\mathcal{H}$ jest ν-mierzalny. Dalej otrzymujemy dla dowolnego podzbioru $X \subseteq E$

$$\exists_{B_1,B_2\in\mathcal{B}(E)} \ \ h(B_1) \subseteq h(X) \subseteq h(B_2) \ \ \nu(h(B_1)) = \nu(h(B_2)).$$

A to znaczy, że

$$\exists_{B_1,B_2\in\mathcal{B}(E)} \ \ B_1 \subseteq X \subseteq B_2 \ \text{ i } \ \mu(B_1) = \mu(B_2). \qquad \blacksquare$$

Literatura.

[1] L.Bukovsky, *Struktura realnej osi*, VEDA vydavatelstwo Slovenskej akademie vied, Bratislava 1979.

[2] R.Engelking, *Topologia ogólna*, PWN 1976.

[3] W.Guzicki i P.Zbierski, *Podstawy teorii mnogości*, PWN 1978.

[4] E.M.Kleinberg, *Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness*, Springer -Verlag 1977.

[5] K.Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN 1980.

[6] K.Kuratowski i A.Mostowski, *Teoria Mnogości*, PWN 1978.

[7] E.Marczewski, *On absolutely measurable sets and functions*, Collected Mathematical Papers, Warszawa 1996, 160-186.

[8] R.Murawski, *Filozofia Matematyki*, PWN 1995.

[9] J.Mycielski, *On the axiom of determinateness*, Fund. Math. 53 (1964), 205-224.

[10] J.Mycielski and H.Steinhaus, *A mathematical axiom contradicting the axiom of choice*, Bull. Acad. Polon. Sci., Series Math., Astr., Phys. 10 (1962), 1-3.

[11] J.Mycielski and Świerczkowski, *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*, Fund. Math. 54 (1964), 67-71.

[12] J.C.Oxtoby, *The Banach-Mazur game and the Banach category theorem, Contrybutions to the theory of games*, Vol. III, Annals of Math. Studies no. 39, Princeton 1957, 159-163.

[13] J.C.Oxtoby, *Measure and Category*, Graduate Texts in Mathematics, Springer -Verlag 1971.

[14] W.M.Schmidt, *On badly aproximable numbers and certain games*, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966).

[15] R.Telgarsky, *Topological games: On the 50th anniversary of the Banach-Mazur game*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 17, no. 2, Spring 1987, 227-276.

[16] O.Zindulka, *Killing residual measures*, Lecture on Winter School on abstract analysis, Harrachow 1992.